数理解析研究所講究録 第2115巻 2019年 39-45

Complex dynamics of Markov systems of families of rational maps

Takayuki Watanabe
Graduate School of Human and Environmental Studies, Kyoto Univesity
Yoshida Nihonmatsu-cho , Sakyo-ku, Kyoto, 606-8501, Japan.

渡邉 天鵬
京都大学大学院人間・環境学研究科共生人間学専攻数理科学講座
〒606-8501 京都市左京区吉田二本松町
E-mail: watanabe.takayuki.43c@st.kyoto-u.ac.jp

概要

We consider the random holomorphic dynamical systems on the Riemann sphere whose choices of maps are related to Markov chains. Our motivation is to generalize the facts which hold in i.i.d. random holomorphic dynamical systems. Especially, we focus on the function $\mathbb{T}_\infty$ which represents the probability of tending to infinity. We show some sufficient conditions which make $\mathbb{T}_\infty$ continuous on the whole space and we characterize the Julia sets in terms of the function $\mathbb{T}_\infty$ under certain assumptions.

本稿は筆者の修士論文 [4] に関係するものである．本研究は角大輝氏（京都大学大学院人間・環境学研究科）との共同研究である．リーマン球面 $\hat{\mathbb{C}} \cong \mathbb{P}^1 \simeq S^2$ 上の有理写像を $\hat{\mathbb{C}}$ 上の正則写像とみる．$\hat{\mathbb{C}}$ 上の有理写像からなるランダム力学系に関連して，写像を選択する規則が独立同分布でないような力学系について考えたい．その中でも最も簡単な，写像をマルコフ的に選択する場合について考察する．独立同分布なランダム複素力学系に関する結果 [3] の一部をマルコフ的な場合へと一般化できたので，本稿ではこの内容について解説する．

Rat を $\hat{\mathbb{C}}$ 上の非定数有理写像全体の空間とし，一様収束位相を入れる．

以下本稿では，次の設定を考える．

設定 0.1. $m \in \mathbb{N}$ とし，Rat 上の m^2 個の（非負）測度 $\tau = (\tau_{ij})_{i,j=1,\cdots,m}$ が次を満たすと仮定する：$p_{ij} := \tau_{ij}(\mathrm{Rat}) \geq 0, P := (p_{ij})_{i,j}$ とおくと P は既約な確率行列である．ここで P が既約であるとは，任意の $i, j = 1, \cdots, m$ に対して，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，行列 P^N の (i, j) 成分が正になることをいう．

以下，設定 0.1 の τ が与えられたとし，(z, i) から $B \times \{j\}$ への遷移確率が $\tau_{ij}(\{f \in \mathrm{Rat};\ f(z) \in$

$B\})$ となるような $\hat{\mathbb{C}}\times\{1,\cdots,m\}\simeq\sqcup_{i=1}^{m}\hat{\mathbb{C}}$ 上のマルコフ連鎖を考える．ここで，z は $\hat{\mathbb{C}}$ 上の点，B は $\hat{\mathbb{C}}$ のボレル集合，$i,j=1,\cdots,m$ である．

注意 0.2. $m=1$ のとき上記のマルコフ連鎖は，確率測度 τ_{11} から毎回独立に写像を選択するランダム複素力学系である．$m\geq 2$ のとき一般には独立同分布でなく，本稿で重要なのはこの場合である．

1 マルコフシステムの定義と協調原理

記号 1.1. 設定 0.1 の τ に対し，$V:=\{1,\cdots,m\},E:=\{(i,j);\,p_{ij}>0\}$ とおき，(V,E) を有向グラフとみる．有向辺 e に対し，その始点，終点をそれぞれ $i(e),t(e)$ とかく：$e=(i(e),t(e))$．$e\in E$ に対し $\Gamma_e:=\operatorname{supp}\tau_{i(e)t(e)}$ とおく．これらの組 $S_\tau=(V,E,(\Gamma_e)_{e\in E})$ を τ が誘導するマルコフシステムという．

定義 1.2. マルコフシステム S_τ について以下のように定義する．

(i) 長さ $N\in\mathbb{N}$ の語 $e=(e_1,e_2,\ldots,e_N)\in E^N$ が許容語であるとは，$t(e_n)=i(e_{n+1})$ が任意の $n=1,2,\cdots,N-1$ について成り立つことをいう．この語 e に対し $i(e_1)$ (resp. $t(e_N)$) を e の始点 (resp. 終点) といい $i(e)$ (resp. $t(e)$) と記す．

(ii) 頂点 $i\in V$ から $j\in V$ に向かう写像の合成全体

$$\{f_{e_N}\circ\cdots\circ f_{e_2}\circ f_{e_1};N\in\mathbb{N},f_{e_n}\in\Gamma_{e_n},i=i(e_1),t(e_n)=i(e_{n+1})\,(\forall n=1,\ldots,N-1),t(e_N)=j\}$$

を $H_i^j(S_\tau)$ とおく．$H_i(S_\tau):=\bigcup_{j\in V}H_i^j(S_\tau)$ と定める．

(iii) $\hat{\mathbb{C}}$ 上の点 z_0 で，z_0 のある近傍 U が存在して U から $\hat{\mathbb{C}}$ への写像族 $H_i(S_\tau)$ が U 上で同程度連続になるものの全体を $F_i(S_\tau)$ とおき，これを S_τ の $i\in V$ におけるファトウ集合という．すなわち，$z_0\in F_i(S_\tau)$ とは，次が成り立つことをいう：z_0 のある近傍 U が存在して，任意の $z\in U$ と任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $\delta>0$ が存在して，任意の $h\in H_i(S_\tau)$ と，z との球面距離が δ より小さいような任意の z' に対して，$h(z)$ と $h(z')$ との球面距離が ε より小さい．
ファトウ集合の補集合 $J_i(S_\tau):=\hat{\mathbb{C}}\setminus F_i(S_\tau)$ を i におけるジュリア集合という．さらに，$J(S_\tau):=\bigcup_{i\in V}J_i(S)$ を S_τ のジュリア集合という．

(iv) $\mathbb{F}(S):=\bigcup_{i\in V}F_i(S)\times\{i\},\mathbb{J}(S):=\bigcup_{i\in V}J_i(S)\times\{i\}$ とおく．

(v) $J_{\ker,i}(S_\tau):=\bigcap_{j\in V}\bigcap_{h\in H_i^j(S_\tau)}h^{-1}(J_j(S_\tau))$ を S_τ の $i\in V$ における核ジュリア集合という．

補題 1.3. (i) 任意の $i\in V$ に対して，ファトウ集合 $F_i(S_\tau)$ は $\hat{\mathbb{C}}$ の開集合，ジュリア集合 $J_i(S_\tau)$ はコンパクト集合である．

(ii) 任意の $e\in E$ と任意の $f\in\Gamma_e$ に対して，$f^{-1}(J_{t(e)}(S_\tau))\subset J_{i(e)}(S_\tau)$ が成り立つ．

(iii) 任意の $e \in E$ に対して Γ_e がコンパクトなら，任意の $i \in V$ に対して

$$\bigcup_{\imath(e)=\imath} \bigcup_{f \in \Gamma_e} f^{-1}(J_{t(e)}(S_\tau)) = J_i(S_\tau)$$

が成り立つ．

(iv) 3 点以上を含むコンパクト集合のあつまり $(K_i)_{\imath \in V}$ が，任意の $e \in E$ と任意の $f \in \Gamma_e$ に対して $f^{-1}(K_{t(e)}) \subset K_{\imath(e)}$ を満たすと仮定する．このとき，任意の $i \in V$ に対して $J_i(S_\tau) \subset K_i$ が成り立つ．

(v) ある $j \in V$ に対し $J_j(S_\tau)$ が 3 点以上を含むとする．このとき，任意の $i \in V$ に対して $J_i(S_\tau)$ は孤立点を含まない非可算集合である．

(vi) 任意の $j \in V$ に対し $\bigcup_{h \in H_j^\jmath(S_\tau)} h^{-1}(z_0)$ の要素の数が 3 より少ない点 z_0 の集合を $E_j(S_\tau)$ とおく．このとき，任意の $i, j \in V$ と任意の $z \in J_j(S_\tau) \setminus E_\jmath(S_\tau)$ に対して $J_i(S_\tau) = \overline{\bigcup_{h \in H_\imath^\jmath(S_\tau)} h^{-1}(z)}$ が成り立つ．また，ある $j \in V$ に対し $J_j(S_\tau)$ が 3 点以上を含むなら，任意の $i \in V$ に対し $E_\imath(S_\tau)$ の要素の数は 3 より少ない．

証明.　(i) 定義から明らかである．

(ii) 簡単に確かめられる．

(iii) $\bigcup_{\imath(e)=i} f^{-1}(J_{t(e)}(S_\tau)) \subset J_i(S_\tau)$ は (ii) からしたがう．

(iv) $(K_\imath)_{\imath \in V}$ の条件から任意の $h \in H_i^j(S_\tau)$ に対し $h(\hat{\mathbb{C}} \setminus K_\imath) \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus K_j$ となる．モンテルの定理より $\hat{\mathbb{C}} \setminus K_i \subset F_i(S_\tau)$ となる．

(v) 有理半群の場合の証明 [2] をなぞる．つまり，孤立点があると仮定すると強いモンテルの定理に矛盾する．また，ベールの範疇定理より孤立点の無い集合は非可算集合である．

(vi) 任意の $z \in J_j(S_\tau) \setminus E_j(S_\tau)$ と任意の $i \in V$ に対して $J_i(S_\tau) \supset \overline{\bigcup_{h \in H_\imath^\jmath(S_\tau)} h^{-1}(z)}$ は (ii) から，$J_i(S_\tau) \subset \overline{\bigcup_{h \in H_\imath^\jmath(S_\tau)} h^{-1}(z)}$ は (iv) からしたがう．後半は (iv),(v) からしたがう．

□

命題 1.4. ある $j \in V$ について $\#J_j(S_\tau) \geq 3$ なら，任意の $i \in V$ について

$$J_i(S_\tau) = \overline{\bigcup_{h \in H_i^\imath(S_\tau)} \{z \in \hat{\mathbb{C}};\ z \text{ は } h \text{ の repelling fixed point}\}}$$

が成り立つ．ここで，正則写像 h の固定点 z が repelling であるとは，z における微分の絶対値 $|h'(z)|$ が 1 より大きいことをいう．ただし $z = \infty$ のときは，座標変換 $\varphi(z) = 1/z$ を用いて $h'(\infty) := (\varphi \circ h \circ \varphi^{-1})'(0)$ と定める．

証明. 基本的なアイディアは有理半群の場合と同様である．有理半群については [2] をみよ．　□

定義 1.5. $\mathbb{Y} := \hat{\mathbb{C}} \times V$ とおき，作用素 $M_\tau : \mathrm{C}(\mathbb{Y}) \to \mathrm{C}(\mathbb{Y})$ を

$$M_\tau \phi(z, i) := \sum_{j \in V} \int_{\mathrm{Rat}} \phi(\gamma(z), j) \mathrm{d}\tau_{ij} \quad \phi \in \mathrm{C}(\mathbb{Y}), (z, i) \in \mathbb{Y}$$

によって定める．随伴を考えることにより，M_τ^* は $\mathfrak{M}_1(\mathbb{Y})$ から $\mathfrak{M}_1(\mathbb{Y})$ への連続写像とみなせる．ここで，$\mathfrak{M}_1(\mathbb{Y})$ は $\mathbb{Y}$ 上のボレル確率測度全体の空間であり，汎弱位相をいれる．

随伴作用素 $M_\tau^*\colon \mathfrak{M}_1(\mathbb{Y}) \to \mathfrak{M}_1(\mathbb{Y})$ はある意味で元の力学系を "平均化" するものである．詳しくは [3, Remark 2.21.] を見よ．次の主張は本稿の主定理の一つであり，様々な応用をもつ．

定理 1.6 (協調原理 Cooperation Principle)**.** ある $j \in V$ について核ジュリア集合 $J_{\ker,j}(S_\tau)$ が空集合なら，族 $\{(M_\tau^*)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathfrak{M}_1(\mathbb{Y})$ 上で同程度連続である．

定義 1.7. $(\mathrm{Rat}\times E)^{\mathbb{N}}$ 上のボレル確率測度 $\tilde{\tau}_i\,(i \in V)$ を次で定める：

$N \in \mathbb{N}$ 個の Rat のボレル集合 $A_n(n = 1,\cdots,N)$ と長さ N の語 $(e_1,\ldots,e_N) \in E^N$ に対して $A'_n := A_n \times \{e_n\}, \tilde{A} := A'_1 \times \cdots \times A'_N \times \prod_{N+1}^{\infty}(\mathrm{Rat}\times E)$ とする．この形の $\tilde{A}$ に対して

$$\tilde{\tau}_i(\tilde{A}) = \begin{cases} \tau_{e_1}(A_1)\cdots\tau_{e_N}(A_N) & ,(e_1,\ldots,e_N)\ \text{は始点が}\ i \in V\ \text{の許容語} \\ 0 & ,\text{そうでないとき} \end{cases}$$

となるように $\tilde{\tau}_i$ を定義する．

系 1.8. ある $j \in V$ について核ジュリア集合 $J_{\ker,j}(S_\tau)$ が空集合であると仮定する．このとき，任意の $i \in V$ に対して，$\tilde{\tau}_i$ に関してほとんどすべての無限列 $(\gamma_n, e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathrm{Rat}\times E)^{\mathbb{N}}$ のジュリア集合 $\{z \in \hat{\mathbb{C}};\ \{\gamma_N \circ \cdots \circ \gamma_1\}_{N\in\mathbb{N}}$が z のある近傍上で同程度連続 $\}$ はルベーグ測度ゼロ集合である．

2 コンパクト多項式族のマルコフシステムと無限遠点に収束する確率

この節では設定 0.1 の τ がさらに次の条件を満たすと仮定する：任意の $e \in E$ に対して $\Gamma_e = \mathrm{supp}\,\tau_e$ は 2 次以上の多項式全体の空間 Poly 内のコンパクト集合である．

この条件のもとで ∞ に収束する確率の関数 $\mathbb{T}_\infty$ を定義し，その性質を述べる．その前に，協調原理（定理 1.6）の仮定「核ジュリア集合が空」が満たされるための一つの十分条件を次で与える．

定理 2.1. ある $e \in E$ に対し，ある $c_0 \in \mathbb{C}, f \in \mathrm{Poly}, \varepsilon > 0$ が存在して $\Gamma_e \supset \{f + c \in \mathrm{Poly};\ |c - c_0| < \varepsilon\}$ となると仮定する．このとき，任意の $j \in V$ に対し $J_{\ker,j}(S_\tau)$ が空集合となる．

証明. モンテルの定理を使う． □

定義 2.2. ∞ に収束する確率の関数 $\mathbb{T}_\infty\colon \mathbb{Y} \to [0,1]$ を

$$\mathbb{T}_\infty(z,i)\colon = \tilde{\tau}_i(\{(\gamma_n,e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathrm{Rat}\times E)^{\mathbb{N}};\ \gamma_N \circ \cdots \circ \gamma_1(z) \to \infty (N \to \infty)\})$$

によって定める．

また，行列 P の既約性から，$pP=p$ かつ $\sum_{i=1}^{m} p_i=1$ となる正のベクトル $p=(p_1,\ldots,p_m)$ が存在する．初期分布 p に対して平均化された関数 $T_\infty\colon\ \hat{\mathbb{C}}\to[0,1]$ を $T_\infty(z):=\sum_{i=1}^{m} p_i\mathbb{T}_\infty(z,i)$ によって定める．

次の結果は本稿の主定理である．有限個の多項式がつくるマルコフシステムが適当な条件を満たすときに，$\mathbb{T}_\infty$ がジュリア集合 $\mathbb{J}(S_\tau)$ 上でのみ変化する連続関数になることを述べている．

定理 2.3. (i) ある $j\in V$ について $J_{\mathrm{ker},j}(S_\tau)$ が空集合なら，$\mathbb{T}_\infty$ は $\mathbb{Y}$ 上で連続である．

(ii) 任意の $e\in E$ に対し $\#\Gamma_e<\infty$ とする．さらに，始点を共有する任意の二辺 $e_1,e_2\in E$ と任意の $f_1\in\Gamma_{e_1},f_2\in\Gamma_{e_2}$ に対して $f_1^{-1}(J_{t(e_1)}(S_\tau))\cap f_2^{-1}(J_{t(e_2)}(S_\tau))=\emptyset$ が成り立つと仮定する．ただし，$e_1=e_2$ かつ $f_1=f_2$ となる場合を除く．このとき，$\mathbb{T}_\infty$ は恒等的に 1 となるか，または任意の $i\in V$ に対して

$$J_i(S_\tau)=\{z\in\mathbb{C};\ \mathbb{T}_\infty \text{は}\ z\ \text{の任意の近傍で定数でない}\}$$

となる．また，ジュリア集合 $J_i(S_\tau)$ は内点をもたない．

(iii) 上記 (ii) の仮定に加え，$i(e_1)=i(e_2)$ かつ $e_1\neq e_2$ となる $e_1,e_2\in E$ が存在すると仮定する．このとき，$\mathbb{T}_\infty$ は $\mathbb{Y}$ 上で連続であり，任意の $i\in V$ について $\mathbb{T}_\infty(J_i(S_\tau)\times\{i\})=[0,1]$ となる．

この定理から，より具体的な設定に関する次の系が得られる．

系 2.4. m 個の多項式 $f_1,\ldots,f_m\in\mathrm{Poly}$ と既約な確率行列 $P=(p_{ij})_{i,j=1,\cdots,m}$ が与えられたときに，ディラック測度の定数倍 $p_{ij}\delta_{f_i}=\tau_{ij}$ によって $\tau=(\tau_{ij})$ を定める．いま，ある $z_0\in\hat{\mathbb{C}}$ が存在して $T_\infty(z_0)=0$ かつ任意の $i,j\in V$ について $J_i\cap J_j=\emptyset\,(i\neq j)$ と仮定する．このとき，ジュリア集合 $J(S_\tau)$ は ∞ に収束する確率の関数 T_∞ が局所定数でない点全体と一致し，$\mathrm{int}J(S_\tau)=\emptyset$ である．さらに，ある $i,j,k\in\{1,\cdots,m\}$ に対して $p_{ij}>0$ かつ $p_{ik}>0$ が成り立つならば，T_∞ は $\hat{\mathbb{C}}$ 上連続で，0 から 1 までの任意の値を $J(S_\tau)$ 上でとる．

例 2.5. $m=2$ とする．$g_1(z)=z^2-1, g_2(z)=z^2/4$ とし， $f_i=g_i\circ g_i\,(i=1,2)$ とする．また，既約な確率行列 $P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ に対し，系 2.4 の方法で τ を定める．すなわち，f_i に質量を持つディラック測度を δ_{f_i} とおき，$\tau_{ij}=p_{ij}\delta_{f_i}$ によって $\tau=(\tau_{ij})$ を定める．P に対する初期分布は $p=(p_1,p_2)=(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$ である．この例は「最初に写像 f_i を確率 p_i で選択し，その後は写像 f_i を選んだ後に写像 f_j を確率 p_{ij} で毎回選択する」ランダム力学系を意味している．

上述の状況において，$J_1(S_\tau)\cap J_2(S_\tau)=\emptyset$ となるので，このシステム S_τ は系 2.4 の仮定を満たす．∞ に収束しない確率の関数 $1-T_\infty$ のグラフを描画した図 1 からわかるように，T_∞ は $\hat{\mathbb{C}}$ 上連続かつジュリア集合 $J(S_\tau)=J_1(S_\tau)\cup J_2(S_\tau)$ 上でのみ値が変化している．また，図 2 は図 1 を真上から見た図であり，ジュリア集合 $J(S_\tau)$ が孤立点も内点も持たないことが見て取れる．また，この例に関しては，$J(S_\tau)$ のハウスドルフ次元が 2 より真に小さいことが [3, Example 6.2] に

より示される．素朴な意味で，ジュリア集合の図 2 はいわゆる「フラクタル集合」のように見える．

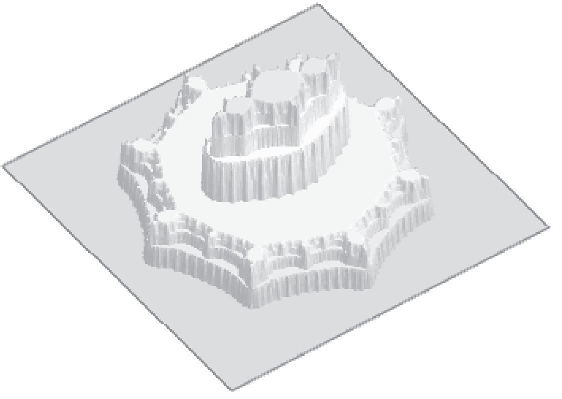

図 1　∞ に収束しない確率の関数 $1 - T_\infty$ のグラフ．T_∞ は「フラクタル」集合 $J($
み変化する特異な連続関数である．

図 2　真上から図 1 を見た様子．色が変化している部分がジュリア集合 $J(S_\tau)$ である．ジュリア集合は孤立点及び内点を持たない．さらに，この場合は非可算個の連結成分をもち，ハウスドルフ次元は 2 より真に小さい．

参考文献

[1] John Milnor, Dynamics in one complex variable, third edition. Annals of Mathematical Studies. 160, Princeton University Press, 2006.

[2] Rich Stankewitz, Density of repelling fixed points in the Julia set of a rational or entire semigroup, II. Discrete Contin. Dyn. Syst. 32 (2012), no. 7, 2583-2589.

[3] Hiroki Sumi, Random complex dynamics and semigroups of holomorphic maps. Proc. Lond. Math. Soc. (3) 102 (2011), no. 1, 50-112.

[4] 渡邉天鵬, マルコフシステムの力学系におけるジュリア集合とその特徴付け, 大阪大学大学院理学研究科数学専攻 2017 年度修士論文